応用力学

[問] 長さ $2l$ の細い鎖がある。太さは一様で、単位長さ当たりの密度は ρ とする。鎖の両端を $(-a,0)$,$(a,0)$ にあるフックに掛けたときに重力のもとで垂れ下がる形を求めよ。ただし $a<l$ で、重力加速度 g は一定とする。また水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸方向をとっている。重力場において鎖全体の位置エネルギーが極小となる形を求める。鎖の微小長を ds とすると、微小長の鎖にかかる位置エネルギーは

$$dU = \rho g y ds \tag{1}$$

ここで ρ は糸の線密度、g は重力加速度をそれぞれ表す。微小長 ds は座標系 dx,dy を用いると次のように書くことができる。

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \sqrt{1+y'^2}dx \tag{2}$$

したがって、(1) 式は

$$dU = \rho g y\sqrt{1+y'^2}dx \tag{3}$$

全体の位置エネルギーの総和は、積分で表され

$$U = \rho g \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}dx \tag{4}$$

となる。ここで ρ, g は定数であるから除き、上式の変分をとると

$$\delta \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}dx = 0 \tag{5}$$

と書ける。次に鎖の長さは $2l$ であり、つねに一定であるから

$$\int ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}dx = 2l \tag{6}$$

が成り立つ。上式の変分は

$$\delta \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}dx = 0 \tag{7}$$

となる。ここでラグランジュの未定乗数法より λ を未定数として導入すると (5), (7) 式より

$$\delta \int_{-a}^{a} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}dx = 0 \tag{8}$$

上式より $F(x,y,y') = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$ とし、オイラーの方程式を書くと

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = (y+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

以上よりオイラーの方程式は、

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)-\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\}-\sqrt{1+y'^2}=0 \tag{9}$$

ここで、

$$y'=\frac{dy}{dx}=p \quad , \quad \frac{d}{dx}=p\frac{d}{dy}$$

と置くと、(9) 式は

$$p\frac{d}{dy}p=\frac{1+p^2}{y+\lambda} \tag{10}$$

変数分離すると

$$\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y+\lambda} \tag{11}$$

両辺をそれぞれ積分する。

- (左辺)：$u=p^2$ と置くと $du=2pdp$、従って

$$\int\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}=\frac{1}{2}\log|1+u|+C_1=\frac{1}{2}\log|1+p^2|+C_1 \tag{12}$$

- (右辺)：$u=y+\lambda$ と置くと $du=dy$

$$\int\frac{dy}{y+\lambda}=\int\frac{du}{u}=\log|u|=\log|y+\lambda| \tag{13}$$

C_1 は積分定数である。(右辺),(左辺) より

$$\log|y+\lambda|=\frac{1}{2}\log|1+p^2|+C_1=\log|C_1(1+p^2)^{1/2}| \tag{14}$$

$$\therefore y+\lambda=C_1\sqrt{1+p^2} \tag{15}$$

得られた (15) 式の両辺を 2 乗する。

$$\Big(\frac{y+\lambda}{C_1}\Big)^2=1+p^2=1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 \tag{16}$$

$$\pm\sqrt{\Big(\frac{y+\lambda}{C_1}\Big)^2-1}=\frac{dy}{dx} \tag{17}$$

変数分離を行うと

$$\frac{dy}{\sqrt{\Big(\frac{y+\lambda}{C_1}\Big)^2-1}}=\pm dx \tag{18}$$

ここで $u=\dfrac{y+\lambda}{C_1}$ と置くと $du=\dfrac{dy}{C_1}$ となり、従って上式は

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\pm\frac{1}{C_1}\int dx \tag{19}$$

両辺をそれぞれ積分する

- (左辺)：ここで $\sqrt{u^2-1}=t-u$ と置くと

$$u=\frac{t^2+1}{2t} \tag{20}$$

$$\sqrt{u^2-1}=t-u=\frac{t^2-1}{2t} \tag{21}$$

$$du=\frac{t^2-1}{2t^2}dt \tag{22}$$

(19) 式に (21), (22) 式を代入すると

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|=\log\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| \tag{23}$$

- (右辺)：

$$\pm\frac{1}{C_1}\int dx=\pm\frac{x}{C_1}+C_2 \qquad C_2\text{: 積分定数} \tag{24}$$

以上より

$$\log\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|=\pm\frac{x}{C_1}+C_2 \tag{25}$$

log を右辺に移行し、$\sqrt{u^2-1}$ について解くと

$$\sqrt{u^2-1}=\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)-u \tag{26}$$

両辺を 2 乗すると

$$u^2-1=\left\{\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)-u\right\}^2 \tag{27}$$

従って、

$$2u\exp(\pm\frac{x}{C_1}+C_2)=1+\exp\left\{2\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)\right\} \tag{28}$$

u について解けば、

$$u=\frac{1}{2}\left[\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)+\exp\left\{-\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)\right\}\right] \tag{29}$$

u を元に戻せば、

$$y=\frac{C_1}{2}\left[\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)+\exp\left\{-\left(\pm\frac{x}{C_1}+C_2\right)\right\}\right]-\lambda \tag{30}$$

となる。ここで問題文から $x=\pm a$ のとき $y=0$ であり、この関係は常に成り立つから、従って (30) 式から恒等式

$$\exp\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)e^{C_2}+\exp\left(\mp\frac{a}{C_1}\right)e^{-C_2}=\exp\left(\mp\frac{a}{C_1}\right)e^{C_2}+\exp\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)e^{-C_2} \tag{31}$$

が得られる。

$$e^{C_2}\left\{\exp\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)-\exp\left(\mp\frac{a}{C_1}\right)\right\}-e^{-C_2}\left\{\exp\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)-\exp\left(\mp\frac{a}{C_1}\right)\right\}=0 \tag{32}$$

$$\left(e^{C_2}-e^{-C_2}\right)\left\{\exp\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)-\exp\left(\mp\frac{a}{C_1}\right)\right\}=0 \tag{33}$$

a は定数であるから、第二項は 0 にはならない。従って第一項が 0 にならなければならないから

$$\left(e^{C_2}-e^{-C_2}\right)=0 \tag{34}$$

従って

$$C_2=0 \tag{35}$$

以上より (30) 式は、

$$y=\frac{C_1}{2}\left\{\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}\right)+\exp\left(\mp\frac{x}{C_1}\right)\right\}-\lambda \tag{36}$$

$$=\frac{C_1}{2}\cosh\left(\pm\frac{x}{C_1}\right)-\lambda \tag{37}$$

次に糸の長さを求めるために $\int\sqrt{1+y'^2}dx$ を計算する。(36) 式より

$$y'=\frac{C_1}{2}\left\{\pm\frac{1}{C_1}\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}\right)\mp\frac{1}{C_1}\exp\left(\mp\frac{x}{C_1}\right)\right\} \tag{38}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\pm\exp\left(\pm\frac{x}{C_1}\right)\mp\exp\left(\mp\frac{x}{C_1}\right)\right\} \tag{39}$$

従って、

$$1+y'^2=\left(\frac{e^{\pm\frac{x}{C_1}}+e^{\mp\frac{x}{C_1}}}{2}\right)^2 \tag{40}$$

上式より

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_{-a}^{a}\left(\frac{e^{\pm\frac{x}{C_1}}+e^{\mp\frac{x}{C_1}}}{2}\right)dx \tag{41}$$

$$=\pm C_1\left(e^{\pm\frac{a}{C_1}}-e^{\mp\frac{a}{C_1}}\right) \tag{42}$$

$$=\pm 2C_1\sinh\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)=2l \tag{43}$$

これが問題文より糸の長さ $2l$ と等しくならなければならない。C_1 について解くと

$$\therefore C_1=\pm l\sinh^{-1}\left(\pm\frac{a}{C_1}\right) \tag{44}$$

$x=\pm a$ の時 $y=0$ であるから (37) 式と (44) 式から未定数 λ を求めることができる。

$$\lambda=C_1\cosh\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)=\pm l\tanh^{-1}\left(\pm\frac{a}{C_1}\right) \tag{45}$$

従って (37) 式と (45) 式より y は

$$\therefore y=C_1\left\{\cosh\left(\pm\frac{x}{C_1}\right)-\cosh\left(\pm\frac{a}{C_1}\right)\right\} \tag{46}$$