

第 1 章

Maxwell 方程式の導出

1.1 Maxwell の第 1 方程式 (静電界)

P 点を中心とした十分小さい閉曲面 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の直方体を考える。

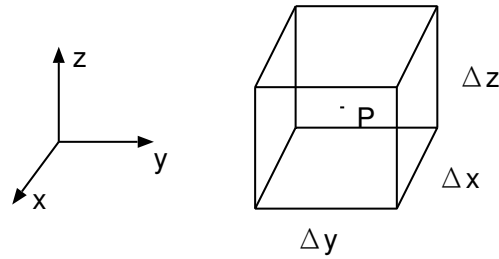


Fig.1 : 直交座標における微小直方体

ガウスの定理を適用すると

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (1.1)$$

上の積分は、閉曲面の積分を行うことを意味している。従って、各面に対する計 6 組の積分を考えれば良い。

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{前}} + \int_{\text{裏}} + \int_{\text{左}} + \int_{\text{右}} + \int_{\text{頂}} + \int_{\text{底}} \quad (1.2)$$

今、面素は十分小さく取っているので、 $\mathbf{D}$ は本質的に一定と考えて良いから

$$\int_{\text{前}} \simeq \mathbf{D}_{\text{前}} \cdot \Delta\mathbf{S} \simeq \mathbf{D}_{\text{前}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \simeq D_{x \text{ 前}} \Delta y \Delta z \quad (1.3)$$

ここで前面の D_x の近似値を求める必要がある。前面は P 点から $\Delta x/2$ の距離にあるから

$$D_{x \text{ 前}} \simeq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times (x \text{ についての变化の割合}) \quad (1.4)$$

$$\simeq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \quad (1.5)$$

ここで D_{x0} は P 点における D_x 値、また一般に D_x は y, z についても変化するから、 x についての D_x の変化の割合を示すのに偏導関数を用いる。従って

$$\int_{\text{前}} \simeq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \quad (1.6)$$

同様にして裏面の積分は、

$$\int_{\text{裏}} \simeq \mathbf{D}_{\text{裏}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{裏}} \simeq \mathbf{D}_{\text{裏}} \cdot (\Delta y \Delta z)(-\mathbf{a}_x) \simeq -D_{x \text{ 裏}} \Delta y \Delta z \quad (1.7)$$

裏面における $D_{x \text{ 裏}}$ は

$$D_{x \text{ 裏}} \simeq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \quad (1.8)$$

上の 2 式より

$$\int_{\text{裏}} \simeq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \quad (1.9)$$

以上より前と裏の積分の和は

$$\int_{\text{前}} + \int_{\text{裏}} \simeq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.10)$$

同様にして、 y, z 方向についても考えると

$$\int_{\text{右}} + \int_{\text{左}} \simeq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.11)$$

$$\int_{\text{頂}} + \int_{\text{底}} \simeq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.12)$$

従って、まとめると

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.13)$$

すなわち

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \quad (1.14)$$

ここで $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ である。この体積素 Δv が小さくなるに従って近似が良くなる。

式展開すると

$$\frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \simeq \frac{Q}{\Delta v} \quad (1.15)$$

極限操作で

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v} \quad (1.16)$$

ここで近似式が等式に置き換えられた。最後の項は体積電荷密度 ρ_v となるから

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \text{div} \mathbf{D} \quad (1.17)$$

従って

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v \quad (1.18)$$

上式の物理的な意味は、ベクトル束密度 $\mathbf{D}$ の発散は体積が 0 に近づくとき、小さな閉曲面からの単位体積当たりの束の流出であることを意味している。

発散の定義式は

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (1.19)$$

以上より

$$\therefore \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \quad (1.20)$$

となり、Maxwell 方程式の第 1 方程式 (静電界) を導出することができる。

1.2 Maxwell の第 2 方程式 (静磁界)

次に磁界に対するガウスの定理を考える。電荷の場合は、電荷 Q は電束の流線ソースである。しかし磁束の流線は常に閉じており、磁荷に終端することはない。従って磁界に対するガウスの定理は

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.21)$$

微分形式で表記すると、発散の定理より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.22)$$

1.3 Maxwell の第 3 方程式

上節では、電荷と磁荷のそれぞれの性質から一般条件が得られた。しかし、1831 年に Faraday は電場と磁場との間に相互作用があることを発見した。この法則を Faraday の法則といい、次式で表される。

$$\phi = IR = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.23)$$

ここで ϕ は Volt、 I は Ampere を、 R は抵抗である。 Φ は閉路内を通過する磁束を表す。従って、 $d\Phi/dt$ は磁束の時間変化の割合を表している。磁束の単位は $Wb = V/sec$ である。マイナスが付いているために、結局磁束は起電力 ϕ を減少させる方向に発生する。誘起電圧が反対方向の磁束を発生するように作用することは、Lenz の法則として知られている。

閉路が N 回巻の導線でできているとすると、各閉路においてまったく同様の考えが成り立ち、

$$\phi = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.24)$$

となる。ここで ϕ は N 回巻の同じ経路のいずれか 1 つを通過する磁束を示している。次に ϕ を定義する。 ϕ はスカラーであり、次元は V である。

$$\phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (1.25)$$

と定義する。上式は特定の閉路に関する電位差を示している。経路のある部分が変化すると、一般に V は変化する。

ここで、磁束 Φ は閉曲面によって囲まれた任意の曲面 S 上の表面積分で表され、

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.26)$$

で定義される。従って、(1.25) 式は

$$\phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.27)$$

ここで、右手の親指の方向に $d\mathbf{S}$ が、残りの指の方向に閉路が向いている。従って、 $d\mathbf{S}$ の方向に時間と共に増大する磁束密度 $\mathbf{B}$ は閉路の正方向とは反対の方向に平均値 $\mathbf{E}$ を発生させることとなる。

上式の左辺にストークスの定理を適用すると、

$$\phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.28)$$

面積分は両辺とも同じ面上でなされ、これを微小面を選んで良いから

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.29)$$

従って、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.30)$$

が得られる。この式は、時間的に変化する磁界によって電界が発生することを述べている。

1.4 Maxwell の第4 方程式

次に Ampere の周回積分の法則について考える。Ampere の法則は次式で表される。

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (1.31)$$

閉路内を通過する方向に回した右ネジの進む方向に流れる電流を正の電流と定義する。

今、 $\Delta x, \Delta y$ からなる閉路を考える。

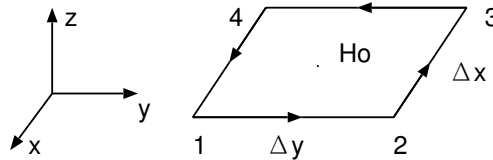


Fig.2 : 直交座標における微小閉路

中心の $\mathbf{H}$ を $\mathbf{H}_0 = H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y + H_{z0}\mathbf{a}_z$ とすると、この閉路周りの $\mathbf{H}$ の積分は近似的に各边上の $\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L}$ の4つの値の和で表される。 $\mathbf{a}_z$ 方向の電流に対して、回転する方向を $1-2-3-4-1$ と選ぶ、 $1-2$ の $(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2}$ の値は

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} = H_{y,1-2}\Delta y \quad (1.32)$$

この線分上 (1-2) の H_y の値は、中心基準値 H_{y0} の x についての H_y の変化の割合、中心から辺 (1-2) の中心点までの距離 $\Delta x/2$ の項で与えられる。

$$H_{y,1-2} \simeq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (1.33)$$

従って

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{L})_{1-2} \simeq \left(H_{y0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \quad (1.34)$$

同様にして、(2-3)

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{L})_{2-3} \simeq H_{x,2-3}(-\Delta x) \simeq \left(H_{x0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \quad (1.35)$$

全体を加えると

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \simeq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (1.36)$$

Ampere の法則から、この結果は閉路で囲まれた電流または経路によって制限された任意の面を通過する電流に等しくなければならない。電流密度 $\mathbf{J}$ とすると囲まれた電流は $\Delta I \simeq J_z \Delta x \Delta y$ より、

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \simeq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \simeq J_z \quad (1.37)$$

閉路を小さくしてゆくと、この式の近似は正確になっていき、極限で等式となる。すなわち

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (1.38)$$

囲まれた電流は $\mathbf{H}$ の閉路積分に等しいという Ampere の周回積分から出発して、囲まれた単位面積当たりの $\mathbf{H}$ の閉路積分と囲まれた単位面積当たりの電流すなわち電流密度との関係が得られた。同様にして、

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \quad (1.39)$$

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta z} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \quad (1.40)$$

が得られる。これは回転 (*rot*) を表す。

$$\text{rot} \mathbf{H} = \lim \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.41)$$

単位面積当たりの循環を回転といってもよい。以上より Ampere の法則の微分表示形

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.42)$$

が得られた。次にこの式の両辺の発散をとる。

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (1.43)$$

ベクトルの回転の発散は、恒等式的に 0 であるから、 $\nabla \cdot \mathbf{J}$ も 0 であるが、電流の連続の式 (後述) から

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.44)$$

従って、 $\partial \rho_v / \partial t = 0$ の時だけ、Ampere の法則の微分形が成り立つこととなる。しかしこれは非現実的な制限であり、時間的に変化する場合に対して、このように仮定する前に、(1.42) 式を修正する必要がある。(1.42) 式に未知の項 $\mathbf{G}$ を加えて

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G} \quad (1.45)$$

右辺の発散をとると

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (1.46)$$

すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.47)$$

ρ_v を $\nabla \cdot \mathbf{D}$ で置き換えると

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.48)$$

従って、

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.49)$$

よって、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.50)$$

1.5 Maxwell 方程式

- cgs 系

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e) \quad (1.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.53)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.54)$$

- MKS 系

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = e(n_i - n_e) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (1.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.58)$$

- 物質方程式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.59)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.60)$$

ここで ϵ_0, μ_0 は真空中の誘電率、透磁率をそれぞれ表している。

1.6 導出の流れ

1. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$

Coulomb 法則より求まる。Gauss の定理から、微分形を求める。

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \rightarrow \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho_v$$

2. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Coulomb 法則より求まる。磁束の定義より、Gauss の定理の磁界版を求め、その微分形を算出する。

$$\Phi = \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

3. $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$

Faraday の法則より、ストークスの定理を適用し整理すると求まる。

$$\phi = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}$

Ampere の法則の微分形を求め、連続の式の補正を行うと求まる。

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

1.7 電流の連続性

電荷保存則より、等量の正・負の電荷が電離などにより同時に発生したり、再結合などにより消失することはあるが、正あるいは負の電荷が単独で発生、消失したりすることはない。境界が閉曲面である領域を考えると、連続の方程式は、この保存則に従う。閉曲面を通過する電流は

$$I = \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.61)$$

また、正の電荷の面外への流出は、面内での正の電荷の減少で平衡状態になる。閉曲面内の電荷を Q_i とすると、減少の割合は $-dQ_i/dt$ で電荷保存則から

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (1.62)$$

前式における電流 I は面外へ流出する電流である。微分形すなわち点における表示は発散の定理から面積分を体積積分に変更することによって得られる

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv \quad (1.63)$$

また、電荷密度の体積積分で閉曲面内の電荷 Q_i を表すと

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv \quad (1.64)$$

一定の閉曲面を考えると、導関数は偏導関数になり、積分内に入る。

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = \int_v -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \quad (1.65)$$

この式は、任意の小さな体積について成立するから、 Δv についても成り立つ。従って、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.66)$$

発散の物理的意味から、この方程式は小さな体積から発散する単位体積当たりの電流、すなわち 1 秒当たりの電荷は、すべての点において単位体積当たりの電荷の減少の時間的割合に等しいことを示している。