

ペルチェを用いた熱システムのモデル化

目次

1. はじめに.....	3
2. 目的.....	3
3. 適用文書.....	3
4. 熱システムのモデル化.....	4
4.1 前提条件.....	4
4.2 モデル.....	5
4.3 差分化.....	6
4.4 シミュレーション.....	8
4.5 実験との比較.....	9
4.5.1 試験コンフィギュレーション.....	9
4.5.2 試験条件.....	10
4.5.3 試験結果.....	10
4.6 ソースコード.....	12

1. はじめに

ペルチェ設計(ペルチェ素子を用いた温度制御システム)におけるモデルの妥当性を評価するために実験を行った。

2. 目的

本文書は、ペルチェ素子による温度制御システムのモデル化を行い、実験を行うことによって、モデルの妥当性を評価することを目的とする。

3. 適用文書

適用文書を以下に示す。

C06003-SF01 「仕様書ペルチェモジュール FPH1-3103NC」

4. 熱システムのモデル化

4.1 前提条件

以下、表 1 に熱システムのパラメータを示す。

表 1 前提条件

No	項目	内容	備考	
1	ペルチェ素子	型番	FPH1-3103NC	フジタカ製
		最大電流 I_{max}	3.0[A]	
		最大電圧 V_{max}	3.8[V]	
		最大吸熱量	7.3[W] 8.0[W]	$T_h = 27[\text{deg}]$ 時 $T_h = 50[\text{deg}]$ 時
		抵抗値	$1.0 \Omega \pm 10\%$	
		制御時間 τ	600[sec]	
	ヒートシンク	型番	23M80L50	
		材質	アルミニウム	
		表面積	212.5[cm ²]	
		熱抵抗 θ	5[deg/W]	
温度 T_h		ヒートシンクの温度[deg]		
2	サーミスタ	型番	103JT-100	
		抵抗値	10[k Ω]	25[deg]時
		許容差	$\pm 1\%$	
		B 定数	3435[K] $\pm 1\%$	
		使用温度範囲	-50~90[deg]	
3	対象物	材質	アルミニウム	冷却の対象物体
		寸法	90×90×6[mm]	
		比熱 C	881[J/kg·K]	
		密度 ρ	2700[kg/m ³]	
		温度 T_c	アルミ温度[deg]	
		熱容量 C_{AL}	115.6[J/K]	
	断熱材	材質	発泡スチール	
		厚み t	15[mm]	最小値を採用
		熱伝導率 λ	0.025[W/mK]	
		断熱面積 S_D	0.01436 [m ²]	下面・側面・上面を含む
	環境条件	常温 T_e	22.99[deg]	実測と合わせたため
		空気の熱伝達率 α	50[W/m ² K]	
		空気と対象物の接触面積 S_a	0.004 [m ²]	

4.2 モデル

以下、図 1 に熱システムのモデルを示す。想定する熱システムは、ペルチェを用いて、アルミを熱輸送によって冷却するシステムである。輸送した熱はヒートシンクを介して、周囲に排熱される。特に明記しない限りは、表 1 のパラメータを使用する。本モデルではペルチェ-ヒートシンク間、ペルチェ-アルミ間の熱抵抗は十分小さいものとし、無視する。また、周囲温度は一定とした。

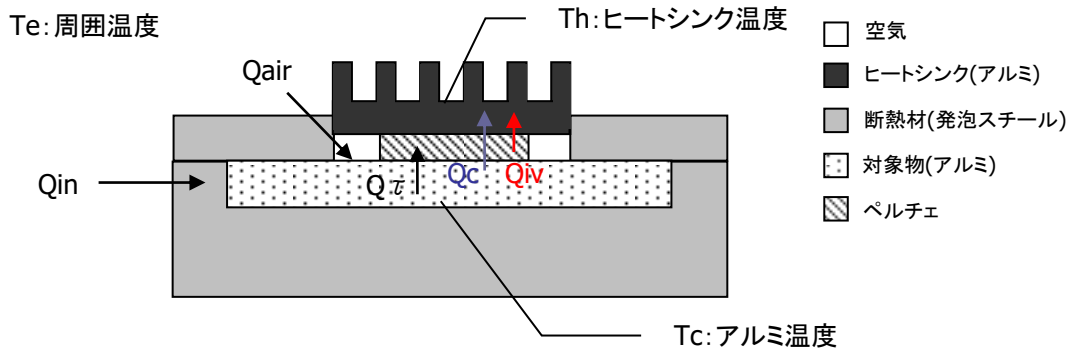


図 1 熱システムのモデル

上記の熱システムの数学モデルを以下に示す。

$$C_{AL} \frac{dT_c}{dt} = Q_{in} + Q_{air} + Q_{\tau} - Q_c \quad (1)$$

ここで、 C_{AL} は対象物(アルミ)の熱容量である。 Q_{in} は断熱材を介してアルミに流入する熱量、 Q_{air} は空気と接触している面から流入する熱量、 Q_{τ} はアルミをある温度 T_c にするために輸送しなければならない熱量である。ここで、 Q_{in} ・ Q_{air} ・ Q_{τ} は以下のように表される。

$$Q_{in} = Q_{in}(T_e, T_c) = \frac{S_D(T_e - T_c)}{0.137 + t/\lambda} \quad (2)$$

$$Q_{air} = Q_{air}(T_e, T_c) = S_a \alpha (T_e - T_c) \quad (3)$$

$$Q_{\tau} = Q_{\tau}(T_e, T_c) = \frac{Cp(T_e - T_c)}{\tau} \quad (4)$$

Q_{in} における t は時間ではなく断熱材の厚み t である(値は表 1 を参照のこと)。次に、 Q_c と Q_{iv} は共にペルチェ素子における熱量である。 Q_c がペルチェが輸送する熱量、 Q_{iv} はペルチェに流れる電流によって発熱する熱量である。ここで、 Q_c ・ Q_{iv} は以下のように表される。

$$Q_c = Q_c(T_h, T_c, I) = A(T_h - T_c) + B \quad (5)$$

$$Q_{iv} = Q_{iv}(I, V) = IV \quad (6)$$

ここで、ペルチェが輸送する熱量 Q_c の A、B 値はペルチェ素子のデータシート¹から算出する。データシートから値を読み取り²、最小二乗法により A、B 値を求める。

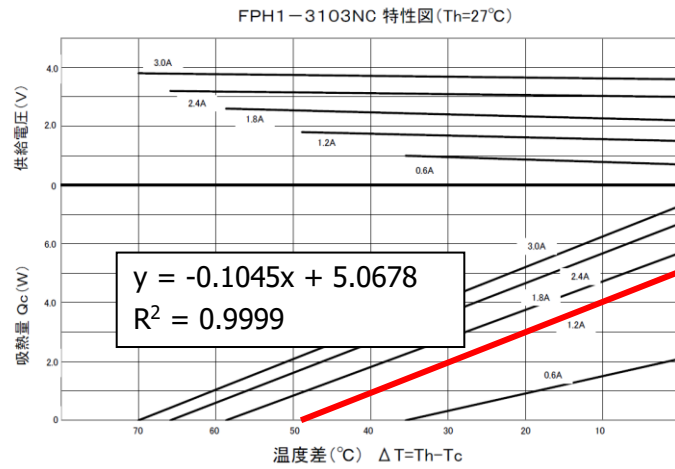


図 2 ペルチェ特性図

ここでは、ペルチェに 1.2[A]の電流値を流す場合を想定する。図 2 から A、B 値は、
 $A = -0.1045$ 、 $B = 5.0678$

となる。 Q_{iv} は、図 2 からわかるように温度によって変化する。一般的に温度差が大きくなるほど、ペルチェの消費電力も大きくなる。ここでは、1.2[A]を流した場合、電圧は 2[V]とし、

$$Q_{iv} = 1.2 \times 2 = 2.4$$

とする。次に、ヒートシンクの温度 T_h は周囲の温度とヒートシンクの熱抵抗 θ から求められる。 T_h は、以下のように書ける。

$$T_h = T_c + (Q_c + Q_{iv})\theta \quad (7)$$

したがって、 Q_c は以下のように書ける。

$$Q_c = Q_c(T_h, T_c, 1.2) = -0.1045(T_h - T_c) + 5.0678$$

4.3 差分法

上節で立てた数学モデルを差分法し、コンピュータ上で演算可能な式を導出する。ここでは、最も単純な前進差分法を使用する。①式より、

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{Q_{in} + Q_{air} + Q_{\tau} - Q_c}{C_{AL}} \quad (8)$$

ここで、時間微分を有限時間 Δt に置き換えると、

¹ 仕様書ペルチェモジュール FPH1-3103NC を参照のこと。

² フリーソフトウェアの「DigitalCurveTracer」などを用いるとよい。

$$\frac{dT_c}{dt} \approx \frac{T_c^n - T_c^{n-1}}{\Delta t} = \frac{Q_{in}^{n-1} + Q_{air}^{n-1} + Q_{\tau}^{n-1} - Q_c^{n-1}}{C_{AL}}$$

よって、解くべき方程式は、

$$T_c^n = T_c^{n-1} + \frac{\Delta t}{C_{AL}} (Q_{in}^{n-1} + Q_{air}^{n-1} + Q_{\tau}^{n-1} - Q_c^{n-1}) \quad (9)$$

となる。ここで、微分を差分化したことによって、時間空間は離散化される。そのため、方程式を解くということは、時刻 Δt ごとにおけるアルミ温度 T_c^n を求めることとなる。同様にして、②から⑦式を差分化すると、

$$Q_{in}^{n-1} = \frac{S_D(T_e - T_c^{n-1})}{0.137 + t/\lambda} \quad (10)$$

$$Q_{air}^{n-1} = S_a \alpha (T_e - T_c^{n-1}) \quad (11)$$

$$Q_{\tau}^{n-1} = \frac{C\rho(T_e - T_c^{n-1})}{\tau} \quad (12)$$

となる。次に、 Q_c と T_h の差分化であるが、

$$Q_c^{n-1} = A(T_h^{n-1} - T_c^{n-1}) + B$$

$$T_h^{n-1} = T_e + (Q_c^{n-1} + Q_{iv})\theta$$

となり、未知数が互いの式に入っており、このままでは解くことができないので、両式を連立し解くと、

$$Q_c^{n-1} = \frac{A(T_e + Q_{iv} - T_c^{n-1}) + B}{1 - A\theta} \quad (13)$$

$$T_h^{n-1} = T_e + Q_{iv}\theta + Q_c^{n-1} \quad (14)$$

となる。以上より、解くべき方程式⑨～⑭式が求まった。

4.4 シミュレーション

上節で求めた方程式を使って、熱システムのシミュレーションを行う。表 2 にシミュレーションパラメータを示す。

表 2 シミュレーションパラメータ

No	パラメータ	値
1	刻み幅 Δt	0.01
2	計算回数	200,000

計算フローを以下、図 3 に示す。

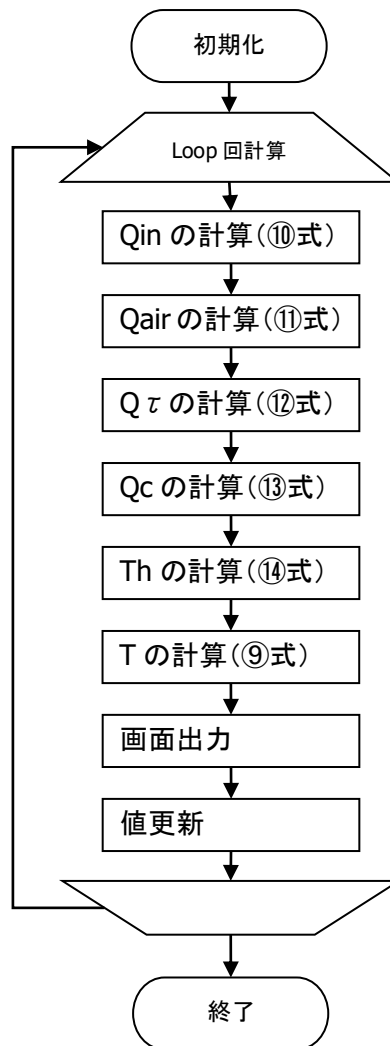


図 3 計算フロー

図 3 の計算フローにてシミュレーションを行った結果を以下、図 4 に示す。計算には、C 言語 (ANSI 規格準拠) を用いた。計算結果をテキスト出力し、エクセルにてグラフ化している。計算に使用したソースコードを本文書末に記載する。

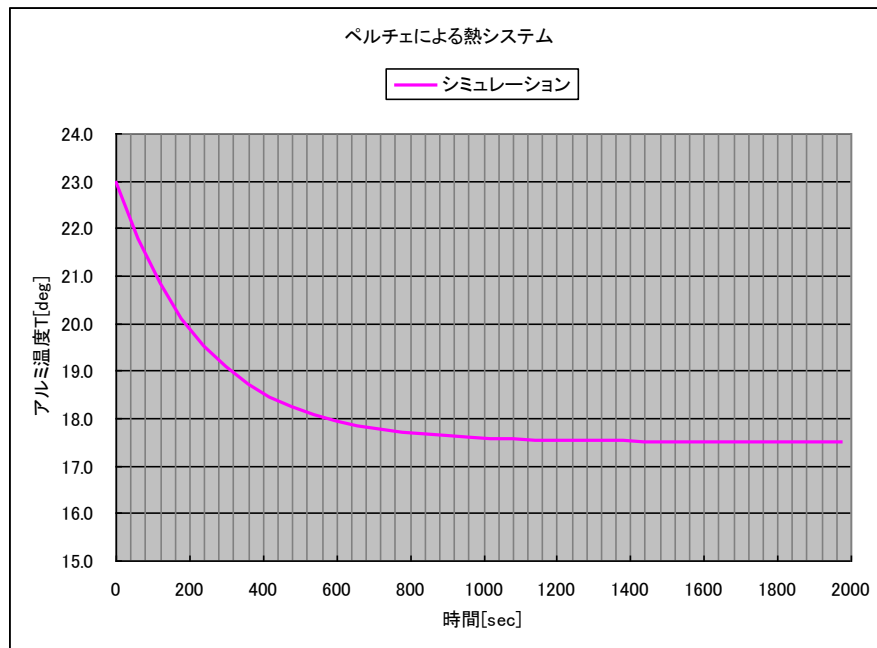


図 4 シミュレーション結果

シミュレーションの結果、アルミ温度は、17.5[deg]付近で飽和することが分かる。

4.5 実験との比較

熱システムの試験を行い、シミュレーションの妥当性を評価する。試験は表 1 からなる熱システムを構築し行った。

4.5.1 試験コンフィギュレーション

図 5 に試験コンフィギュレーションを示す。電力供給には、安定化電源を使用した。また、温度計測にはサーミスタを使用し、テスターを用いて抵抗値を計測し、温度に換算した。

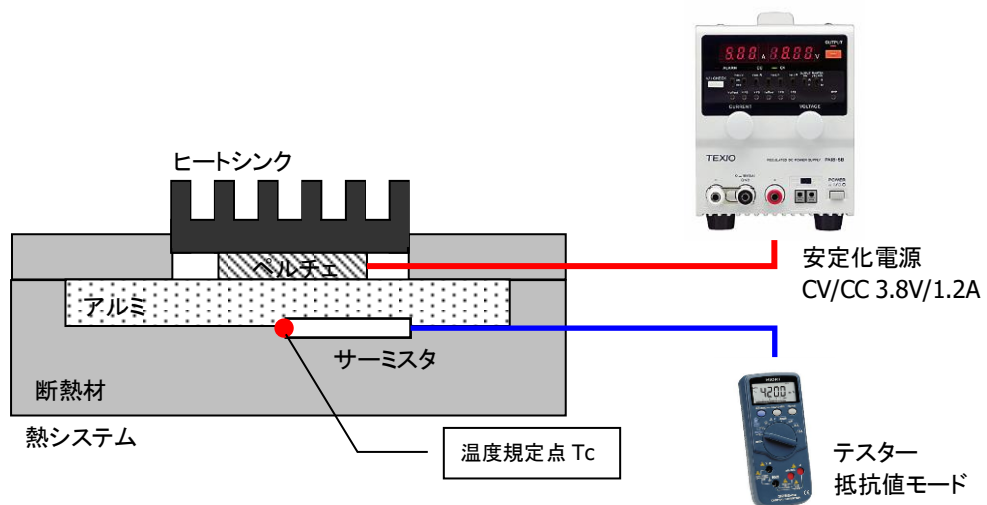


図 5 試験コンフィギュレーション

製作した熱システムを図 6 に示す。アルミとヒートシンクの間にはペルチェを挿入している。アルミとヒートシンクはネジで締結しており、ネジ経由での熱伝導を防ぐため、ポリワッシャーを 2 重にして使用している。また、ペルチェには熱伝導グリスを塗布し、アルミとヒートシンクへの熱伝導を向上した。

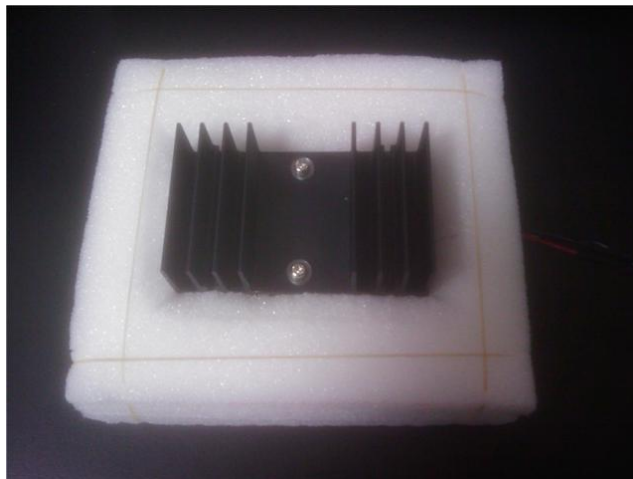


図 6 製作した熱システム

4.5.2 試験条件

以下に試験条件を示す。

表 3 試験条件

No	項目	内容
1	実施日	2009/12/04
2	場所	****
3	周囲温度	約 23[deg]
4	設定電圧	CV 3.8[V]
5	設定電流	CC 1.2[A]
6	測定間隔	1[min]

4.5.3 試験結果

試験結果を図 7 に示す。電圧はアルミの温度低下と共に増加する傾向が見られた。電流値は、1.2[A]の一定であった。ペルチェの温度差が大きくなるほど、熱輸送のために必要な電力が増加したためだと考えられる。

図 4 のシミュレーション結果に試験結果を入れたグラフを図 8 に示す。試験結果とシミュレーションは、良い一致を得た。飽和に達する前までは、シミュレーションの方が、温度が低く、飽和後は実測値の方が、温度が低い。シミュレーションの飽和値が実測より高いのは、外部からの熱流量が多めに見積もられていると考えられる。その他の誤差原因として、物性値の誤差、サーミスタ抵抗値から温度変換への誤差、モデルの誤差が考えられる。熱に関する設定は、電気設計と異なり、熱パスの想定が難しい。そのため、設計する系の簡易モデルをシミュレーション及び試験の結果をコリレーションすることによって、妥当性を評価することが有益かもしれない。

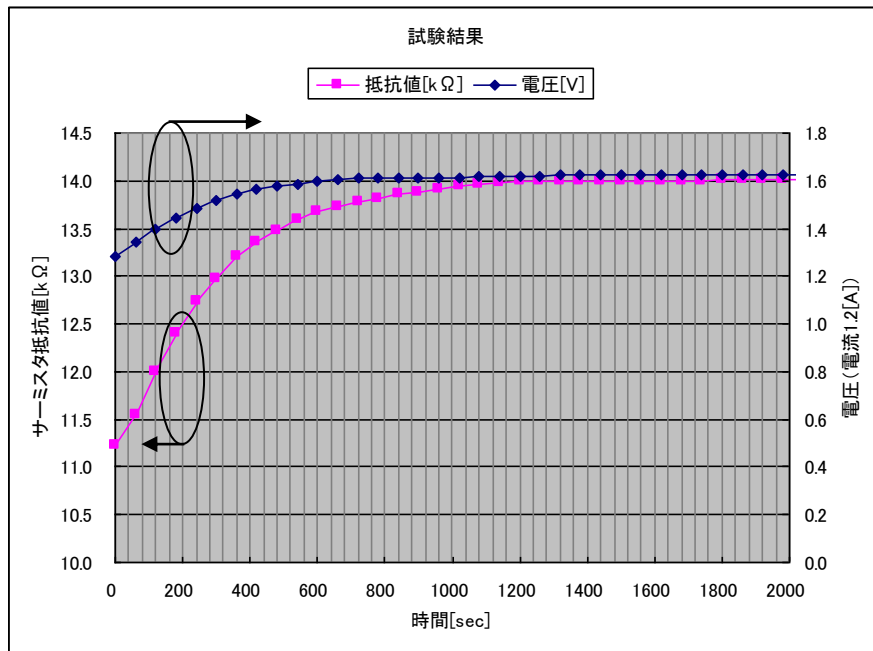


図 7 試験結果

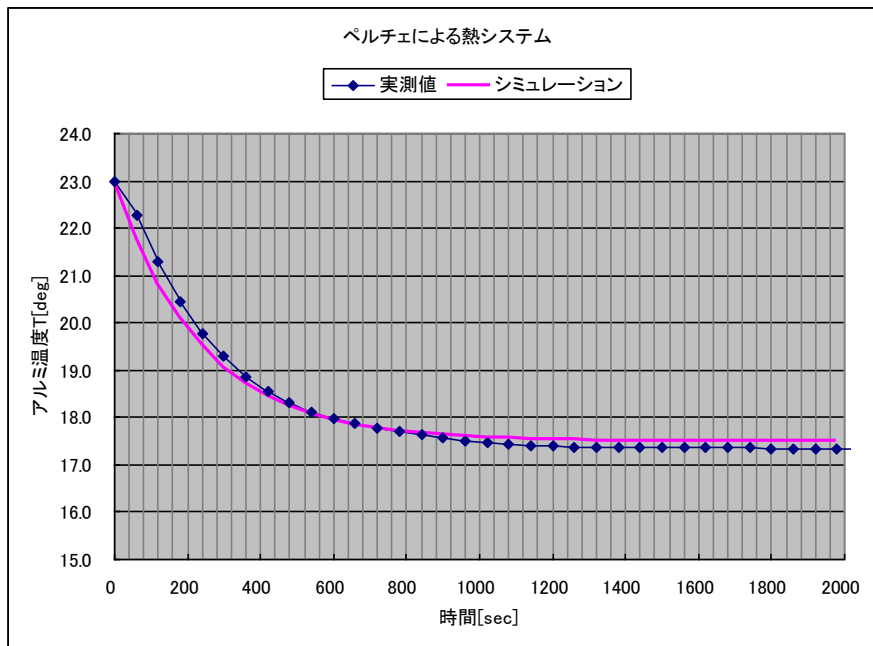


図 8 試験とシミュレーションの結果

4.6 ソースコード

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define dt          0.01                // 刻み幅[sec]
#define pi          3.1415926          // 円周率
#define Loop        200000             // 計算回数
#define STEP        6000               // 出カステップ

#define Te          22.99              // 初期周囲温度[deg]
#define Tc          0.0                // 設定温度[deg]
#define Cal         115.60482          // アルミの熱容量[J/K]
#define tau         600                // 制御時間[sec]
#define ts          0.015              // 断熱材の厚み[m]
#define lam         0.025              // 断熱材の熱伝導率[W/mK]
#define Sd          0.01436           // 断熱面積[m2]
#define Sa          0.004              // 空気との接触面積[m2]
#define alp         50                 // 空気の熱伝導率[W/m2K]
#define C           881                // アルミの比熱[J/kg・K]
#define V           (0.09*0.09*0.006) // アルミ板の体積[m3]
#define rho         2700               // アルミの密度[kg/m3]
#define the         5                  // ヒートシンクの熱抵抗[deg/W]
#define Qiv         2.00               // ペルチェ IV 発熱[W]

#define I           1.2                // 電流[A]
#define A           -0.1045            // 電流 1.2[A]における係数 1
#define B           5.0678            // 電流 1.2[A]における係数 2

static double Tn; // アルミ温度[deg]未来
static double Tq; // アルミ温度[deg]現在
static double Qin; // 断熱材経由での熱
static double Qair; // 空気経由での熱
static double Qt; // アルミからの熱
static double Qc; // 輸送する熱 Qn
static double Qthe; // ヒートシンクの熱

int main(void)
{
    int i;
    double Qin = Qair = Qt = Qc = Qthe = 0;
    double Th = Tn = Tq = Te;

    for(i=0; i<Loop; i++)
    {
        // Qin の計算
        Qin = Sd*(Te-Tq)/(0.137+ts/lam);

        // Qair の計算
        Qair = Sa*alp*(Te-Tq);

        // Qt の計算
        Qt = C*rho*V*(Te-Tq)/tau;

        // Qc の計算
        Qc = (A*(Te+Qiv*the-Tq) + B)/(1-A*the);
        Th = Te+Qiv*the+Qc;

        // 熱方程式の解法
        Tn = Tq + (Qin + Qair + Qt - Qc)*dt/Cal;

        // 計算結果の表示
    }
}
```

```
        if (i % STEP == 0) printf("%f%f%f%f%f%f\n", i*dt, Tq, Qc, Qin, Qair, Qt);

        // 值更新
        Tq      = Tn;
        Qq      = Qc;
    }

    return 0;
}
```