フレネル積分

$$\oint e^{-z^2} dz \tag{1}$$

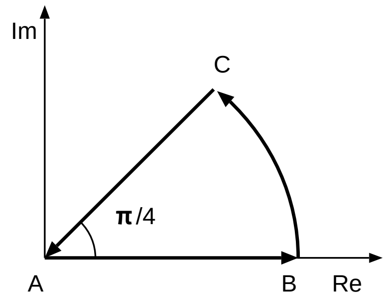

Fig.1：積分経路

Fig.1 のような積分経路で (1) 式を計算する。まず経路を 3 つに分け、それぞれを計算していく。また、経路内に特異点がないことから (1) 式はゼロになることが分かる。よって

$$\oint = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = 0 \tag{2}$$

経路 AB の積分は、実軸上の積分なので実数 x に置き換えることができる。このとき $R \to \infty$ とすると

$$\int_{AB} = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3}$$

となる。次に円弧 BC の積分を行う、極座標表示すると

$$\int_{BC} = \int_0^{\pi/4} iRe^{i\theta} e^{-R^2 e^{2i\theta}} d\theta \tag{4}$$

収束判定を行うと

$$0 \leq \left| iRe^{i\theta} e^{-R^2 e^{2i\theta}} \right| \leq Re^{-R^2 \cos 2\theta} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right) \tag{5}$$

このとき $R \to \infty$ とすると

$$\lim_{R\to\infty} Re^{-R^2 \cos 2\theta} \to 0 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right) \tag{6}$$

(証明略) よって、

$$\left| \int_{BC} \right| \to 0 \quad (R \to \infty) \tag{7}$$

を得る。最後に経路 CA について考える。極座標表示し $R \to \infty$ を考えると

$$\int_{CA} = \int_\infty^0 e^{-z^2} dz = -\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) e^{-ir^2} dr \quad (R \to \infty) \tag{8}$$

以上 (3), (7), (8) 式を (2) 式に代入すると

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 - \int_0^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) e^{-ir^2} dr = 0 \tag{9}$$

となる。整理すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \cos r^2 dr + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sin r^2 dr + \frac{i}{\sqrt{2}} \Bigg(\int_0^\infty \cos r^2 dr - \int_0^\infty \sin r^2 dr \Bigg) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{10}$$

ここで実部と虚部とに分けると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \cos r^2 dr + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sin r^2 dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \cos r^2 dr - \int_0^\infty \sin r^2 dr = 0 \tag{12}$$

(12) 式より

$$\int_0^\infty \cos r^2 dr = \int_0^\infty \sin r^2 dr \tag{13}$$

を得る。よって、(11) 式より

$$\int_0^\infty \cos r^2 dr = \int_0^\infty \sin r^2 dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{14}$$

となる。