双方連続王手による千日手の不可能性について

やまいも

2008 年 6 月 25 日

1 はじめに

この問題は，やねうらお氏が自身のブログ上で提起した問題である[*1].

問題 1. 王手に対し，その王手を防ぎつつ王手を返す，というのを繰り返すことを，双方連続王手と呼ぶことにする．このとき，双方連続王手による千日手は存在するのか.

この問題に対して，氏は “そのような手順は存在しない” ということを主張し，そのことを証明しようとしたが，なかなか上手くいかなかった[*2]．また，氏はこれを車輪の再発明だと思っていたようだが，そうではなかったらしい[*3].

そこで，この文章では “そのような手順は存在しない” ということを証明する．そのためには次の定理を示せば十分である.

定理 2. 双方連続王手で同一局面になるような手順は存在しない.

2 準備

まず，玉の現在の位置に対して，方向と距離を定める.

[*1] 双方連続王手の千日手は成立しない (http://d.hatena.ne.jp/yaneurao/20080604)

[*2] 双方連続王手の千日手は成立しない part2 (http://d.hatena.ne.jp/yaneurao/20080607)，双方連続王手の千日手は成立しない part3 (http://d.hatena.ne.jp/yaneurao/20080608)

[*3] 「双方連続王手の千日手は成立するか」に対する反響 (http://d.hatena.ne.jp/yaneurao/20080606)

定義 3. 玉の現在の位置を $(0,0)\in\mathbf{Z}^2$ になるようにしたとき，方向 $d_i(i=0,\cdots,9)$ を

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \left\{(0,y)\in\mathbf{Z}^2 | y>0\right\} & d_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2 | y=x,\ x>0\right\}\\
d_2 &= \left\{(x,0)\in\mathbf{Z}^2 | x>0\right\} & d_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2 | y=-x,\ x>0\right\}\\
d_4 &= \left\{(0,y)\in\mathbf{Z}^2 | y<0\right\} & d_5 &= \left\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2 | y=x,\ x<0\right\}\\
d_6 &= \left\{(x,0)\in\mathbf{Z}^2 | x<0\right\} & d_7 &= \left\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2 | y=-x,\ x<0\right\}\\
d_8 &= \{(-1,2)\} & d_8 &= \{(1,2)\}
\end{aligned}
$$

と定義する．ただし，整数格子点が将棋盤の一マスにあたるものとする．

また，$(x,y)\in d_i$ に対して，距離を次のように定める．

$$(x,y)\text{ の距離} = \min_{x\neq0,\ y\neq0}\{|x|,|y|\}$$

なお，方向，距離の様子は，図 1 のようになっている．

方向:d_7 距離:3			方向:d_0 距離:3			方向:d_1 距離:3
	方向:d_7 距離:2	方向:d_8 距離:1	方向:d_0 距離:2	方向:d_9 距離:1	方向:d_1 距離:2	
		方向:d_7 距離:1	方向:d_0 距離:1	方向:d_1 距離:1		
方向:d_6 距離:3	方向:d_6 距離:2	方向:d_6 距離:1	玉	方向:d_2 距離:1	方向:d_2 距離:2	方向:d_2 距離:3
		方向:d_5 距離:1	方向:d_4 距離:1	方向:d_3 距離:1		
	方向:d_5 距離:2		方向:d_4 距離:2		方向:d_3 距離:2	
方向:d_5 距離:3			方向:d_4 距離:3			方向:d_3 距離:3

図 1　方向と距離

後手玉に対しても同様に，方向 $d'_i(i=0,\cdots,9)$ と距離を定める．ただし，図の様子は図 1 を 180° 回転させた形になる．

次に，均衡状態，均衡方向を次のように定義する．

定義 4. ある方向 d_i について，(1 つ以上の) 相手の駒の利きを (1 つ以上の) 自分の駒で防いでいる状態を均衡状態という．また，このときの方向 d_i のことを均衡方向という．

最後に，ホットスポットと残余ホットスポットを定義する．

定義 5. 方向 d_i と方向 d'_j が重なる部分をホットスポットという．また，ホットスポットのうち，駒の置かれていないホットスポットを残余ホットスポットという．

図 2 はホットスポットの例である．

		$*$		王
		$*$		$*$
$*$		玉		$*$

図 2　ホットスポットの例 ($*$ がホットスポット)

3　いくつかの有用な命題と，その証明

まず，次の命題を証明する．

命題 6. 双方連続王手で同一局面になる手順が存在するならば，その手順において双方の玉は動かない．

証明. 手順の中で玉が動いたと仮定する．双方連続王手なので，玉が動いた場合，その手が王手になっていなければならない．お互いの玉は距離が 2 以上離れていて，一方，玉の利きの距離は 1 なので，王手は空き王手に限られる．

ところで，空き王手が可能であるならば，ある $i \in \{0, \cdots, 7\}$ が存在して，d_i と d'_i が重なっている．その状態から玉を動かして空き王手をしたとすると，玉は 1 マスしか動けないのだから，d_j と d'_j が重なるような $j \in \{0, \cdots, 7\}$，$j \neq i$ は存在しない．したがって二度と空き王手をすることが出来ず，それゆえこれ以上玉を動かすことも出来なくなる．したがって王を元の位置に戻すことも出来なくなるので，同一局面が現れることに矛盾．よって，手順の中で玉が動くことはない．　□

また，王手の距離に注目すると次の命題が得られる．

命題 7. 双方連続王手で同一局面になる手順が存在するならば，距離が 2 以上の王手が存在する．

証明. 手順中の王手がすべて距離 1 であったと仮定する．このとき，距離が 1 の王手であることから合い駒は効かず，また命題 6 より王が動くことも出来ないので，その駒を盤上の駒で取りながら逆王手するしかない．すると，相手も同様に，その逆王手してきた駒を盤上の駒で取りながら逆王手するしかないので，盤上にある駒は単調減少していってしまう．したがって，これは同一局面が現れることに矛盾．よって，距離が 2 以上の王手が必ず存在する． □

均衡方向に関しては，次の命題が成り立つ．

命題 8. 双方連続王手で同一局面になる手順が存在するならば，均衡状態が生じたとき，その次の手でその均衡状態が解除されなければ，その均衡方向が均衡方向でなくなることはない．

命題 8 を示すために，次の補題を示す．

補題 9. 双方連続王手で同一局面になる手順が存在するならば，その手順において取られる駒は今王手をしている駒に限る．

証明. 今王手をしている駒以外が取られると仮定する．もしその取られる駒が今王手をしている駒と別の方向にあった場合，命題 6 より玉は動くことが出来ないので，玉でその取られる駒を取りながら王手を防ぐといったことが出来ない．そこで，その取られる駒は今王手をしている駒と同じ方向で，しかも今王手をしている駒より近い距離に存在することになる．しかしそれでは，今王手をしている駒の利きがその取られる駒によって遮られてしまっていることになるから，これは矛盾．よって，取られる駒は今王手をしている駒に限る． □

命題 8 の証明. 均衡状態が生じたとき，その次の手で均衡状態が解除されなかったとする．そのとき，均衡方向にいる相手の駒は今王手をしている駒でなくなっているので，補題 9 より，取られることはない．また，均衡方向にいる自分の駒も今王手をしている駒でなくなっているので，補題 9 より，取られることはない．さらに，命題 6 より，玉が動くこともない．したがって，この均衡方向が均衡方向でなくなるためには，均衡方向にいる相手の駒が動いてすべていなくなるか，均衡方向にいる自分の駒が動いてすべていなくなるしかない．しかし，均衡方向にいる自分の駒がすべていなくなってしまっては相手の駒

の利きが直接自玉に届いてしまうので，ダメである．そこで，この均衡方向が均衡方向でなくなるには，均衡方向にいる相手の駒が動いてすべていなくなるしかない．

ところで，均衡方向にいる相手の駒が動くのだとしたら，双方連続王手をしなければならないので，その動いた手が王手になっていなければならない．それが可能なのは，均衡方向が d_0，d_2，d_4，d_6 のいずれかで，かつ相手の駒が龍であり，しかもその距離が 2 であるときに限る．しかし，その場合においても均衡方向が均衡方向でなくなることはない．以下ではそのことを示す．

仮に，龍が動いて王手をしてきたとする．すると，その王手は距離 1 の王手で，また命題 6 より玉は動けないので，その龍は何かしらの駒で取られることになる．なので，さきほどの局面に戻る手順の中で，飛車を打ち，さらにその飛車を動かして龍にする手が含まれることになる．

ところで，何か駒を打つということは，直前に距離 2 以上の王手をされていて，しかもその打った駒で王手になっている必要がある．なので，飛車を打った局面では，距離 2 以上の何かしらの駒で王手されていて，打った飛車で王手がかからなければならない．この打った飛車が取られてしまうと龍にすることが出来ないので，さきほどの局面に戻ることが出来ない．したがって，この飛車は取られないが，すると均衡方向が 1 つ生じることになる．この均衡方向における相手の駒が龍でなかった場合，今までの議論よりこの均衡方向は均衡方向のままなので，同一局面が現れることに矛盾．したがって，この均衡方向における相手の駒は龍であることが確定する．

さて，飛車を打った手が王手になっているのでその王手を防がなければならないが，それには

1. 合い駒を打つ．
2. 龍を移動合いする．

の 2 通りが考えられる．

1 の場合，直前に龍で王手をされているので，打った飛車はこの合い駒を取ることが出来ない．したがって，もう 1 つ均衡方向が生じることになる．打った飛車は龍になっていないので，今までの議論よりこの均衡方向が均衡方向でなくなることはない．よって，同一局面が現れることに矛盾．なので，以下では 2 の場合について考えていく．

この場合，龍による移動合いが同時に距離 1 の王手になっているので，この龍は取られる．よって，打った飛車を動かすことが出来るようになるが，玉のいる方向以外へ動くことはない．なぜなら，打った飛車と玉の間には何かしらの駒が存在する (そうでないと，その手番で玉を取れてしまう) ので，打った飛車を玉のいる方向以外に動かすのは王手に

ならないからである．

以上の議論より，龍を作ることが出来るような配置，および龍の出来る可能性のある位置は，図 3 の 4 タイプに限る ($*$ が龍の出来る可能性のある位置)．

龍	飛	王	
	$*$		
	玉		$\times$

	玉		$\times$
	$*$		
龍	飛	王	

$\times$			
			王
玉		$*$	飛
			龍

			龍
玉		$*$	飛
			王
$\times$			

図 3　龍を作ることが出来るような配置

今考えているのは図 3 のいずれかの状態から龍を移動合いする場合であり，移動合いした龍は取られることになる．すると，先手側も龍を取られたので，同一局面を作るには飛車を打って龍を作らなければならないが，今までの議論よりそのためには図 3 の $\times$ から龍で王手をされなければならない．しかし，後手が龍を作れるのは図 3 の $*$ であるのだから，$\times$ から龍で王手をかけるためには後手の龍は $*$ から $\times$ に移動しなければならない．しかしそれは不可能である．よって矛盾．したがって，龍が動いて王手してくることはないので，均衡方向が均衡方向でなくなることはない．　□

4　定理 2 の証明

さて，以上の命題を用いて，定理 2 の証明をしていこう．

双方連続王手で同一局面になる手順が存在すると仮定する．その手順おいて同一局面が現れたとすると，その局面は先手，もしくは後手が王手を受けている局面である．対称性から，現れた同一局面においては先手が王手を受けているものとしてしまっても一般性を失わない．

また，同一局面になるその手順を見たとき，その手順は円環状になっているのだから，そのどの局面を最初の局面であるとみなしたとしても一般性は失われない．そこで，命題

7 より距離が 2 以上の王手が少なくとも 1 つは存在するので，後手に距離 2 以上の王手をされている局面が最初の局面であることにする．

さて，今その手順において，最初の局面が現れているものとする．すなわち，先手が後手から距離 2 以上の王手を受けているものとする．このとき，先手のとりうる対応は，

1. 王手してきている駒を取る．
2. 残余ホットスポットに駒を打つ．
3. 残余ホットスポットに移動合いする．
4. 残余ホットスポットでないところに移動合いする．

の 4 通りが考えられる．なお，双方連続王手でないといけないので，駒を打つとしたら残余ホットスポットに限ることに注意せよ．

しかし，双方連続王手によって同一局面が現れるのだとしたら，その手順において 4 が現れることはない．なぜなら，もし 4 が手順に現れたとするならば，移動合いをしたことで均衡状態が発生することになる．しかも，残余ホットスポットでないところに移動合いをしたので，その手は空き王手になっている．すると，後手はその空き王手に対応しなければならないので，補題 9 よりその移動合いした駒を取ることが出来ない．したがって，均衡状態が発生した次の手で均衡状態を解除することが出来ないので，命題 8 よりその均衡方向は均衡方向のままとなり，これは同一局面が現れることに矛盾．したがって，4 が手順に現れることはない．なので，先手の対応としては 1，2，3 の 3 通りのみが考えられる．

まず，2 の場合を考える．このとき，もし後手が残余ホットスポットに打たれた駒を取りながら逆王手してこなければ，命題 8 より，このとき生じた均衡方向が均衡方向でなくなることはなくなり，したがって同一局面が現れることもなくなる．なので，後手は残余ホットスポットに打たれた駒を取りながら逆王手してくることになる．これが何回か繰り返されれば，王手の距離がどんどん短くなるので必ず 1 か 3 が現れる．そこで，2 は 1 か 3 に還元されることが分かる．

次に，3 の場合を考える．このとき，もし移動合いした手が空き王手になっていたとすると，後手はその空き王手に対応しなければならないので，移動合いしたことで生じた均衡方向を次の手で解除することが出来ない．すると，命題 8 より，この均衡方向が均衡方向でなくなることはなくなり，したがって同一局面が現れることもなくなる．よって，移動合いした駒によって後手は王手されることになる．このとき，2 のときと同様の議論から，後手はこの駒は取りながら逆王手してくることになる．これが何回か繰り返されれば，王手の距離がどんどん短くなるので必ず 1 か 2 が現れる．そこで，3 は 1 か 2 に還元

されることが分かる．

今までの議論から，2 は 1 か 3 に，3 は 1 か 2 に還元されることが分かった．ただし，ここでもし 2 と 3 のいずれかのみが何度も現れるとする．すると，今までの議論を見れば分かるとおり，その度に，後手の王手の距離は短くなっていくので，いつかは王手してきている駒と玉との間に残余ホットスポットがなくなる．したがって，いつかは 1 が現れざるを得ない．よって，2 と 3 は 1 に還元されることが分かる．なので，1 の場合について考えれば十分である．

さて，1 の場合を考えよう．このとき，2 や 3 から還元されて 1 になる場合も考慮に入れると，盤上から駒は少なくとも 1 枚減っている．そして，王手してきていた駒を取る手が後手への王手になっているが，

1. その王手の距離が 1 なら，後手はその王手してきた駒を取るしかないので，盤上から駒が 1 枚減る．
2. そうでない場合は，今と同じ議論が繰り返され，盤上から駒は少なくとも 1 枚減る．

以下，同様のことが繰り返されるので，盤上の駒は確実に減少していく．すると，同一局面が現れることはないので，これ今考えている手順が双方連続王手で同一局面になるような手順であることに矛盾．したがって，双方連続王手で同一局面になるような手順は存在しない． □

5 結論

定理 2 を示したことで，双方連続王手で千日手になるような手順は存在しないことが示された．

この証明においては，均衡方向，ホットスポットの考えを導入することで王手に対する対応の仕方をどんどん限定させていったことがポイントと言える．特に，命題 8 がとても強力に働いてくれた．

しかし，その命題 8 の証明に関しては，かなり愚直であり，ごちゃごちゃしていると言わざるを得ない．もっとすっきりとした証明を与えることが課題とも言える．