物理 2014 年度大瀧クラス解答一例

1.計算問題なので省略するが、(2)は$|\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}| = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{sin\theta}$、$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{cos\theta}$であることを用いれば解答は容易。(3)は外積の線形性及び$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{A} = \vec{0}$であることを用いれば同様に簡単に計算ができる。(但し、それらをどこまで用いてよいのかは不明)

2. (1)省略

(2)物体間に働く抗力の大きさは等しいので N とおく。また、二物体は接したまま運動し続けるので加速度も等しい。それをαとおく。水平方向の運動方程式を考えて、

$$\begin{cases} m_1\alpha = F - N \\ m_2\alpha = N \end{cases}$$

αを消去して$\mathrm{N} = \frac{m_2}{m_1+m_2}F$

垂直抗力との合力を考えて、求める答えはそれぞれ $\sqrt{(m_1g)^2+(\frac{m_2}{m_1+m_2}F)^2}$, $\sqrt{(m_2g)^2+(\frac{m_2}{m_1+m_2}F)^2}$

3. (1)[解法 1]

$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ (V はポテンシャルエネルギー)

それぞれ y,x で偏微分して$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}$ よって与式成立。(偏微分の順序交換は偏微分した式がそれぞれ連続のときに成り立つ。)

[解法 2]

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial F_y}{\partial \mathrm{z}}\vec{i} + \frac{\partial F_x}{\partial \mathrm{z}}\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

が成立することが$\vec{\mathrm{F}}$が保存力であるための条件。すなわち与式を満たす必要がある。

(2) $\frac{\partial F_x}{\partial y} = ax, \frac{\partial F_y}{\partial x} = ax$より、(1)の条件を満たすため保存力である。

$$\mathrm{V} = -\int \vec{F}dr = -\int axdx - \int axdy = -axy^2 + C_1(C_1\textit{は積分定数})$$

(3) $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} = ax$

[1]a=0 のとき(1)の条件を満たすため保存力である。

$$\mathrm{V} = -\int \vec{F}dr = -\int by^2dy = -\frac{1}{3}by^3 + C_2(C_2\text{は積分定数})$$

[2]a≠0 のとき(1)の条件を満たさないため保存力でない。

4. (1)x 方向:$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bmv_x(t)$ …(i)

y 方向:$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - bmv_y(t)$ …(ii)

(2)(i)$\frac{dv_x(t)}{dt} = -bv_x(t)$

$$\int \frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -b\int dt$$

$\log v_x(t) = -bt + C_1$ (C_1は積分定数)

$v_x(t) = A_1 e^{-bt} (A_1 = e^{C_1})$　　$t = 0$ を代入して$A_1 = v_0 cos\theta_0$

$$\int_0^t v_x(t')dt' = v_0 cos\theta_0 \int_0^t e^{-bt'}dt'$$

$$x = -\frac{v_0 cos\theta_0}{b}(e^{-bt} - 1)$$

(ii) $\frac{dv_y(t)}{dt} = -g - bv_y(t)$

$$\int \frac{dv_y(t)}{g + bv_y(t)} = -\int dt$$

$\log\{g + bv_y(t)\} = -bt + C_2$($C_2$は積分定数)

$v_y(t) = A_2 e^{-bt} - \frac{g}{b} \left(A_2 = \frac{e^{C_2}}{b}\right)$　　$t = 0$ を代入して、$A_2 = v_0 sin\theta_0 + \frac{g}{b}$

$$\int_0^t v_y(t')\,dt' = \int_0^t \left\{\left(v_0 sin\theta_0 + \frac{g}{b}\right)e^{-bt'} - \frac{g}{b}\right\}dt'$$

$$y = -\left(\frac{v_0 sin\theta_0}{b} + \frac{g}{b^2}\right)(e^{-bt} - 1) - \frac{g}{b}t$$

ここが違うなってところがあったら教えてください。