数学要論 II

1 Metric spaces

1.1 Def

集合 X に対し、写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が存在し, 次の条件を満たすとき *(X,d)* を距離空間という.

(1)$\forall x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geqq 0$　　また, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2)$\forall x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$

(3)$\forall x, y, z \in X$ に対し $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$

この節では以下,(X,d) を距離空間とする.

1.2 Def

$p \in X$ の ϵ-近傍を次で定義する.

$$N(p, \epsilon) \equiv \{x \in X \mid d(x, p) \leqq \epsilon\} \tag{1.1}$$

1.3 Def

$A \subset X$ に対し,$p \in X$ が A の内点とは次を満たす事.

$\exists \epsilon$ *s.t.* $N(p,\epsilon) \subset A$

また,A の内点全体を A^i で表し,A の外点全体・境界点全体・閉包を次で定義する.

$A^e \equiv (A^c)^i$　*(外点全体)*

$A^f \equiv X \backslash (A^i \cup A^e)$　*(境界点全体)*

$\bar{A} \equiv A^i \cup A^f$　*(閉包)*

また,$A^i = A$ のとき,A を開集合と言い,

$\bar{A} = A$ のとき,A を閉集合と言う.

この節では以下,(X,d) の開集合全体を $\mathcal{O}$ で表す.

1.4 Thm

次が成立.

(1)$\phi, X \in \mathcal{O}$

(2)$O_i \in \mathcal{O}\,(i = 1, \cdots, n) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$

(3)$O_\lambda \in \mathcal{O}\,(\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

1.5 Thm

$A \subset X$ に対し, 次が成立.

(1)$B \subset A$ *and* B *is open* $\Rightarrow B \subset A^i$

(2)$B \supset A$ *and* B *is closed* $\Rightarrow B \supset \bar{A}$

1.6 Def

$A \subset X, p \in X$ に対し, $p \in \overline{A \backslash \{p\}}$のとき, p を A の集積点といい,

A の集積点全体を導集合と言い, A^dで表す.

1.7 Def

$p \in X, A \subset X$ に対し, 次を定義する.

$d(p, A) \equiv inf\{d(p, q) \mid q \in A\}$

1.8 Thm

$p, q \in X, A \subset X$ に対し, 次が成立.

(1)$|d(p, A) - d(q, A)| \leqq d(p, q)$

(2)$p \in \bar{A} \Rightarrow d(p, A) = 0$

(3)$p \in A^i \Rightarrow d(p, A^c) > 0$

1.9 Def

$U \subset X, p \in X$ に対し, U が p の近傍とは $p \in U^i$が成立すること.

1.10 Lem

(1)$p \in X$ に対し, $U \subset X$ が p の近傍 $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 s.t. N(p, \epsilon) \subset U$

(2)$\forall p \in X, \forall \epsilon > 0, N(p, \epsilon)$ は p の近傍

(3)$p \in X$ に対し, $U, V \subset X$ が p の近傍 $\Rightarrow U \cup V, U \cap V$ も p の近傍

1.11 Def

$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$: 距離空間, 写像 $f : X_1 \to X_2$に対し, f が $a \in X$ で連続とは, 次を満たすこと.

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta\ s.t.$ "$\forall y \in X_1,\ d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$"

また, X_1の任意の点で連続のとき, f は連続と言う.

1.12 Thm

$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$: 距離空間, 写像 $f : X_1 \to X_2$に対し,

f が連続 $\Leftrightarrow$ "$V : open\ in\ X_2 \Rightarrow f^{-1}(V) : open\ in\ X_1$"