計算機科学概論 試験問題 (2011年7月22日)

次の問題1～問題3に答えよ.

問題1

C言語で定義した次の関数fについて，以下の各問に答えよ.

```
int f(int x, int n) {
    int i = 0, y = 1;
    while (i < n) {
        y = y * x;
        i = i + 1;
    }
    return y;
}
```

1. 関数fをf(3,0)，f(3,1)，f(3,4)と呼び出したときの関数の値をそれぞれ求めよ.
2. 関数fの流れ図（flowchart）を描け．始点と終点を明記し，制御の流れる方向を矢印で示すこと.
3. 関数fが呼び出されて最初にwhile文の条件式を計算するときには，条件 $y = x^i$ が成り立っていることを示せ.
4. while文の条件式 i < n の直前では，常に $y = x^i$ が成り立つことを，数学的帰納法を使って証明せよ.
5. nが任意の非負整数のとき，while文の条件式 i < n の直前では，常に $i \leq n$ が成り立っていることを，数学的帰納法を使って証明せよ.
6. nが任意の非負整数のとき，関数fは，x^n を値とすることを証明せよ.

以上

問題2

以下の (1) から (4) の問に解答せよ.

(1) U, V が有限集合で，U の要素の個数は m, V の要素の個数は n であるとする．このとき，以下の (1.1), (1.2), (1,3), (1.4) に答えよ．答だけを記せばよい.

(1.1) U, V の直積集合 $U \times V$ の要素の個数を求めよ.

(1.2) U の巾集合 $\wp(U)$ の要素の個数を求めよ.

(1.3) 関数空間 $U \to V$ の要素の個数を求めよ.

(1.4) U から U への全単射は全部でいくつあるかを求めよ.

(2) 原始帰納的関数は以下の生成規則により生成される.

$$\frac{}{\mathsf{Z} : \mathsf{N}^0 \to \mathsf{N}}\ \mathsf{Z} \qquad \frac{}{\mathsf{S} : \mathsf{N}^1 \to \mathsf{N}}\ \mathsf{S} \qquad \frac{}{\mathsf{P}_{n,i} : \mathsf{N}^n \to \mathsf{N}}\ \mathsf{P}_{n,i}$$

$$\frac{h_1 : \mathsf{N}^n \to \mathsf{N} \quad \cdots \quad h_m : \mathsf{N}^n \to \mathsf{N} \quad g : \mathsf{N}^m \to \mathsf{N}}{\mathsf{C}_n(g, h_1, \ldots, h_m) : \mathsf{N}^n \to \mathsf{N}}\ \mathsf{C}_n$$

$$\frac{g : \mathsf{N}^n \to \mathsf{N} \quad h : \mathsf{N}^{n+2} \to \mathsf{N}}{\mathsf{R}(g, h) : \mathsf{N}^{n+1} \to \mathsf{N}}\ \mathsf{R}$$

これらの規則を用いて，$\mathsf{R}(\mathsf{P}_{1,1}, \mathsf{C}_3(\mathsf{R}(\mathsf{Z}, \mathsf{P}_{2,1}), \mathsf{P}_{3,2})) : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N}$ を結論とする導出をつくれ.

(3) 以下の原始帰納的関数の計算規則中の $\boxed{1}$ から $\boxed{10}$ に入る式を示せ.

$$\frac{}{\mathsf{Z}() \to \boxed{1}}\ \mathsf{Z} \qquad \frac{}{\mathsf{S}(k) \to \mathsf{s}(k)}\ \mathsf{S} \qquad \frac{}{\mathsf{P}_{n,i}(k_1, \ldots, k_n) \to \boxed{2}}\ \mathsf{P}_{n,i}$$

$$\frac{h_1(k_1, \ldots, k_n) \to \boxed{3} \quad \cdots \quad h_m(k_1, \ldots, k_n) \to \boxed{4} \quad g(v_1, \ldots, v_m) \to \boxed{5}}{\mathsf{C}_n(\boxed{6}, h_1, \ldots, h_m)(k_1, \ldots, k_n) \to v}\ \mathsf{C}_n$$

$$\frac{g(k_1, \ldots, k_n) \to v}{\mathsf{R}(g, h)(\boxed{7}, k_1, \ldots, k_n) \to v}\ \mathsf{R}_0 \qquad \frac{\mathsf{R}(g, h)(k, k_1, \ldots, k_n) \to u \quad \boxed{8}(k, \boxed{9}, k_1, \ldots, k_n) \to v}{\mathsf{R}(g, h)(\boxed{10}, k_1, \ldots, k_n) \to v}\ \mathsf{R}_S$$

(4) 空所 $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ に適当な式を入れて，以下の議論が正しくなるようにせよ.

f, g がともに 2 変数原始帰納的関数のとき $H(x) \triangleq g(x, f(x, x))$ で定まる関数 H も原始帰納的関数である．なぜなら,

$$g(x, f(x, x)) = g(\boxed{1}(x), f(\boxed{1}(x), \boxed{1}(x))) = g(\boxed{1}(x), \boxed{2}(x)) = \boxed{3}(g, \boxed{4}, \boxed{5})(x).$$

問題 3

下図は，2つのユニットから構成されるフィードフォーワード型ニューラルネットワークであり，入力x, yに対する出力zは次のように計算される．

$$o_1 = f(w_{1a}x + w_{1b}y + \theta_1)$$
$$z = f(w_{2a}x + w_{21}o_1 + w_{2b}y + \theta_2)$$

このネットワークにおいて入力x_p, y_pに対するトレーニングデータt_pに対して，出力z_pが得られたとき，誤差逆伝播(back propagation)法によって，重み$\{w_{1a}, w_{1b}, \theta_1, w_{2a}, w_{21}, w_{2b}, \theta_2\}$がどのように修正されるか示せ．ただし，$f$は単調非減少な微分可能関数である．