◎「作図可能」「作図不可能」というのは、有理数体Qから出発して、
「定規とコンパスとで作図可能」、および「定規とコンパスとで作図不可能」という意味にとる。すると
次の＜事実1.1＞がある。

＜事実1.1＞　nを自然数とする。

自然数の角n°がQ上「定規とコンパスとで作図可能」 ⇔　nは3の倍数に限る

◎ これらの　3°～87°　のsin, cos, tan の値を順に記す。このような、sin, cos, tan の値の表は私の知る限り、おそらくどこにも載ってないだろう。

まず、正弦、余弦については

(1) $\sin 3^\circ = \cos 87^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(2) $\cos 3^\circ = \sin 87^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(3) $\sin 6^\circ = \cos 84^\circ = \dfrac{-(\sqrt{5}+1)+\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

(4) $\cos 6^\circ = \sin 84^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

(5) $\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}}{8}$

(6) $\cos 9^\circ = \sin 81^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}}{8}$

(7) $\sin 12^\circ = \cos 78^\circ = \dfrac{-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

(8) $\cos 12^\circ = \sin 78^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

(9) $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

(10) $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

(11) $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(12) $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

(13) $\sin 21^\circ = \cos 69^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(14) $\cos 21^\circ = \sin 69^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(15) $\sin 24^\circ = \cos 66^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

(16) $\cos 24^\circ = \sin 66^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

(17) $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}}{8}$

(18) $\cos 27^\circ = \sin 63^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}}{8}$

(19) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$　,　$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(20) $\sin 33^\circ = \cos 57^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(21) $\cos 33^\circ = \sin 57^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(22) $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

(23) $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(24) $\sin 39^\circ = \cos 51^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(25) $\cos 39^\circ = \sin 51^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\left\{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}}{16}$

(26) $\sin 42^\circ = \cos 48^\circ = \dfrac{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

(27) $\cos 42^\circ = \sin 48^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

(28) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ここまでが、3° の倍数の角度の sin，cos　の値である。

この sin，cos の結果を基にして、　tan を計算すれば

◆　tan　の値　は次の様になる。

(1)　$\tan 3^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)\}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\}}{8}$

(2)　$\tan 6^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2}$

(3)　$\tan 9^\circ = (\sqrt{5}+1)-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

(4)　$\tan 12^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\}}{4}$

(5)　$\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

(6)　$\tan 18^\circ = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(7)　$\tan 21^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\}}{8}$

(8)　$\tan 24^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\{-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}}{4}$

(9)　$\tan 27^\circ = (\sqrt{5}-1)-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

(10)　$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(11)　$\tan 33^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)\}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\}}{8}$

(12)　$\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

(13)　$\tan 39^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}-1)\}\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\}}{8}$

(14)　$\tan 42^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

(15)　$\tan 45^\circ = 1$

(16)　$\tan 48^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\}}{4}$

(17)　$\tan 51^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\}}{8}$

(18)　$\tan 54^\circ = \sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(19)　$\tan 57^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}+1)\}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\}}{8}$

(20)　$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(21)　$\tan 63^\circ = (\sqrt{5}-1)+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

(22)　$\tan 66^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

(23)　$\tan 69^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}-1)\}\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\}}{8}$

(24)　$\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

(25)　$\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

(27)　$\tan 78^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

(28)　$\tan 81^\circ = (\sqrt{5}+1)+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

(29)　$\tan 84^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}}{4}$

(30)　$\tan 87^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}+1)\}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\}}{8}$

ここで、何度も計算に用いた、計算補題を示しておく。
「補題2．1」

$(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ . . . (2．1)

$(\sqrt{5}+1)\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ . . . (2．2)

$(3-\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ . . . (2．3)

$(3+\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ . . . (2．4)

$(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}=2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ . . . (2．5)

$(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ . . . (2．6)

$(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}=4\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ . . . (2．7)

$(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}=4\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ . . . (2．8)

$(\sqrt{5}-2)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ . . . (2．9)

$(\sqrt{5}+2)\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ . . . (2．10)

$(\sqrt{5}+1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{50+22\sqrt{5}}=2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ . . . (2．11)

$\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$(\sqrt{5}-1)\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{50-22\sqrt{5}}=2\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ . . . (2．12)

$$\begin{cases}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{5+2\sqrt{5}} & \cdots(2.\ 13)\\ \sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{5-2\sqrt{5}} & \cdots(2.\ 14)\end{cases}$$

逆に解けば
$$\begin{cases}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}} & ...(2.\ 15)\\ \sqrt{10-2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}} & ...(2.\ 16)\end{cases}$$

となる。

(証明) $(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(5+2\sqrt{5})}=\sqrt{(6-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}$

$=\sqrt{30-20+12\sqrt{5}-10\sqrt{5}}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ で、(2．1)は成り立つ。

(2．2)も同様。また、

$(3-\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{(14-6\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}=\sqrt{70-60-30\sqrt{5}+28\sqrt{5}}$

$=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ よって(2.3)も成立。

他も同様にしてできる。

これらを使えば、$\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}=2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ なども証明できる。

◆ 上の表の計算は、いろいろ考えたが $24^\circ=60^\circ-36^\circ$, $12^\circ=30^\circ-18^\circ$ だから、

$$\sin 24^\circ=\sin(60^\circ-36^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 36^\circ-\frac{1}{2}\sin 36^\circ$$

$\cos 24^\circ=\cos(60^\circ-36^\circ)=\frac{1}{2}\cos 36^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 36^\circ$ のように $\sin 24^\circ$, $\cos 24^\circ$ を $\sin 36^\circ$, $\cos 36^\circ$ の線形結合で表したり、

$\sin 12^\circ=\sin(30^\circ-18^\circ)=\frac{1}{2}\sin 72^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 72^\circ$ などと $\sin 72^\circ$, $\cos 72^\circ$ で表しておいて、

$\boxed{\cos 6^\circ=\sin 36^\circ+\sin 24^\circ,\ \sin 6^\circ=\cos 24^\circ-\cos 36^\circ}$ から、

まず、$\sin 6^\circ, \cos 6^\circ, \sin 12^\circ, \cos 12^\circ$ を求める。$\sin 3^\circ, \cos 3^\circ$ については、

$3^\circ=18^\circ-15^\circ$ から求めるのがよいようだ。

◎ また、次のことに注意しておくとよい。

$\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0$ のとき、次のことが成立

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha+\beta=90^\circ+180^\circ\times n\ (\text{nは整数})\\ \Leftrightarrow\ \cos(\alpha+\beta)=0 \Leftrightarrow\ \tan\alpha\times\tan\beta=1\end{array}}$$

特に $\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0$

$$\boxed{\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow\ \tan\alpha\times\tan\beta=1}$$

この事実に注意して、4頁の tanの表を見て確認してほしい。

$\tan\theta$ は $y=\tan\theta$ のグラフから 、$\theta=3^\circ\sim 87^\circ$ の 3° の倍数の角度に対して、計算しておけば必要十分となる。

◆ tan の値 は次の様に表現することができる。

(1) $\tan 3^\circ = \dfrac{2(2\sqrt{3}-3)\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2\sqrt{5-2\sqrt{5}}-(3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)\}}{4}$

$\tan 3^\circ = \dfrac{-2(2-\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)\}}{4}$

(2) $\tan 6^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2}$ (3) $\tan 9^\circ = (\sqrt{5}+1)-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

(4)

$\tan 12^\circ = \dfrac{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}+3\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(3-\sqrt{5})}{2}$

$\tan 12^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(3-\sqrt{5})}{2}$

(5) $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

(6) $\tan 18^\circ = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$

(7) $\tan 21^\circ = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\}}{8}$

$\tan 21^\circ = \dfrac{-2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+2(2\sqrt{3}+3)\sqrt{5-2\sqrt{5}}-(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

$\tan 21^\circ = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2(2+\sqrt{3})\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

(8) $\tan 24^\circ = \dfrac{3\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}$

$\tan 24^\circ = \dfrac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}$

(9) $\tan 27^\circ = (\sqrt{5}-1)-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

(10) $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(11) $\tan 33^\circ = \dfrac{2(2\sqrt{3}-3)\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2\sqrt{5-2\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)\}}{4}$

$\tan 33^\circ = \dfrac{-2(2-\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)\}}{4}$

(12) $\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

(13) $\tan 39^\circ = \dfrac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+2(2\sqrt{3}-3)\sqrt{5-2\sqrt{5}}-(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

$\tan 39^\circ = \dfrac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2(2-\sqrt{3})\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

(14) $\tan 42^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$, (15) $\tan 45^\circ = 1$

(16) $\tan 48^\circ = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}-3\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(3-\sqrt{5})}{2}$

$\tan 48^\circ = \dfrac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(3-\sqrt{5})}{2}$

(17) $\tan 51^\circ = \dfrac{-2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+2(2\sqrt{3}+3)\sqrt{5-2\sqrt{5}}+(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

$\tan 51^\circ = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2(2+\sqrt{3})\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

(18)

$\tan 54^\circ = \sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$

(19) $\tan 57^\circ = \dfrac{2(2\sqrt{3}+3)\sqrt{5+2\sqrt{5}}+2\sqrt{5-2\sqrt{5}}-(3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}+1)\}}{4}$

$\tan 57^\circ = \dfrac{2(2+\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}+1)\}}{4}$

(20) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(21) $\tan 63^\circ = (\sqrt{5}-1)+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

(22) $\tan 66^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

(23) $\tan 69^\circ = \dfrac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+2(2\sqrt{3}-3)\sqrt{5-2\sqrt{5}}+(3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}-1)\}}{4}$

$$\tan 69^\circ = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2(2-\sqrt{3})\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (3-\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}-1)\}}{4}$$

(24) $\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, (25) $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

(26) $$\tan 78^\circ = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

(27) $\tan 81^\circ = (\sqrt{5}+1)+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

(28) $$\tan 84^\circ = \frac{3\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}$$

$$\tan 84^\circ = \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}$$

(29) $$\tan 87^\circ = \frac{2(2\sqrt{3}+3)\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5-2\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}+1)\}}{4}$$

$$\tan 87^\circ = \frac{2(2+\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\{2\sqrt{3}+(\sqrt{5}+1)\}}{4}$$