Rinta Imatsu

6 辺の長さから四面体の体積を求める

体積が V である四面体 OABC において，OA$=a$，OB$=b$，OC$=c$，AB$=r$，BC$=p$，CA$=q$ であり，$\alpha := \angle\mathrm{BOC}$，$\beta := \angle\mathrm{COA}$，$\gamma := \angle\mathrm{AOB}$ とおく．
このとき，V を［$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ の関数］と［a, b, c, p, q, r の関数］，それぞれとして表せ．

四面体を xyz 座標空間上で考える．

四面体の O を座標空間の原点 O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が x 軸の正方向を向くように座標系を導入する．$\mathrm{C}(u, v, w)$ とおくと，

$$V = \frac{|w|}{3}|\triangle\mathrm{OAB}| = \frac{|w|}{6}ab\sin\gamma \cdots\cdots [0]$$

である．

また，$\mathrm{A}(a, 0, 0)$，$\mathrm{B}(b\cos\gamma, b\sin\gamma, 0)$ であるから，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b\cos\gamma \\ b\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \end{cases} \quad \cdots\cdots [1]$$

[1] より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = au \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = b\cos\gamma + b\sin\gamma \end{cases} \quad \cdots\cdots [2]$$

いっぽう内積の定義より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = ac\cos\beta \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = bc\cos\alpha \end{cases} \quad \cdots\cdots [3]$$

[2], [3] より

$$\begin{cases} u = c\cos\beta \\ v = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma} \end{cases} \quad \cdots\cdots [4]$$

ところで，[1] より $\|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2$ で，これは題意より c^2 に等しいから，

$$u^2 + v^2 + w^2 = c^2 \iff w^2 = c^2 - u^2 - v^2 \cdots\cdots [5]$$

[5] に [3], [4] を代入して，

$$
\begin{aligned}
w^2 &= c^2 - u^2 - v^2 \\
&= c^2 \left(1 - \cos^2\beta - \left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma} \right)^2 \right) \\
&= \frac{c^2}{\sin^2\gamma} (\sin^2\gamma - \cos^2\beta\sin^2\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\
&= \frac{c^2}{\sin^2\gamma} (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\
\iff |w| &= \frac{c}{\sin\gamma} \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}. \cdots\cdots [6]
\end{aligned}
$$

よって求める体積 V は，[6] を [0] に代入して，

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{|w|}{6} ab\sin\gamma \\
&= \underline{\frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}} \\
&= \frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2\frac{(b^2+c^2-p^2)(c^2+a^2-q^2)(a^2+b^2-r^2)}{2bc2ca2ab} - \left(\left(\frac{b^2+c^2-p^2}{2bc} \right)^2 + \left(\frac{c^2+a^2-q^2}{2ca} \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-r^2}{2ab} \right)^2 \right)} \\
&= \frac{abc}{6} \frac{1}{2abc} \sqrt{4a^2b^2c^2 + (b^2+c^2-p^2)(c^2+a^2-q^2)(a^2+b^2-r^2) - (a^2(b^2+c^2-p^2)^2 + b^2(c^2+a^2-q^2)^2 + c^2(a^2+b^2-r^2)^2)} \\
&= \underline{\frac{1}{12} \sqrt{4a^2b^2c^2 + (a^2+b^2-r^2)(b^2+c^2-p^2)(c^2+a^2-q^2) - (a^2(b^2+c^2-p^2)^2 + b^2(c^2+a^2-q^2)^2 + c^2(a^2+b^2-r^2)^2)}}.
\end{aligned}
$$